УДК 517.983

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОНЯТИЯ ВОЛЬТЕРРОВОГО ОПЕРАТОРА

© Т.В. Жуковская, Е.С. Жуковский

Предложено общее определение свойства вольтерровости операторов. Показано, что для линейных обобщенно вольтерровых операторов имеет место ряд фундаментальных утверждений теории интегральных операторов volterra.

Ключевые слова: обобщенно вольтерровый оператор, уравнение volterra 2 рода, спектральный радиус, интегральный оператор, вольтерровость сопряженного оператора.

Важнейшим свойством динамических объектов является зависимость их состояний в данный момент времени только от предыдущих внешних и внутренних причин, т.е. от "прошлого", и независимость от "будущего". Это свойство легло в основу известного определения А.Н. Тихонова [1] вольтерровых операторов. Благодаря многочисленным приложениям и возможности содержательных абстрактных обобщений теория вольтерровых операторов в течение многих лет привлекает исследователей. Современные абстрактные трактовки свойства "вольтерровости" операторов предложены в работах [2–9]. Большинство предлагаемых определений означает, что вольтерровый оператор является линейным и обладает цепочкой инвариантных подпространств. Здесь предлагается достаточно общее определение свойства вольтерровости, пригодное как для линейных, так и нелинейных операторов. В работе показано, что для линейных операторов, удовлетворяющих предлагаемому определению, верны фундаментальные утверждения теории классических интегральных операторов Volterra.

Обозначения: m – натуральное число; R^m – m-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$; S – топологическое пространство; $C(S,R^m)$ – пространство ограниченных непрерывных функций $x : S \to R^m$, $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in S}|x(t)|$; (E,Σ,μ) – пространство с мерой, т.е.

множество E, на некоторой σ-алгебре Σ подмножеств которого определена счетно аддитивная функция μ; $L_p(E, R^m)$ – пространство суммируемых в p-ой ($1 \leqslant p < \infty$) степени функций $y : E \to R^m$, $\|y\|_{L_p} = \big(\int\limits_E |y(s)|^p ds\big)^{1/p}$; $L_\infty(E, R^m)$ – пространство измеримых ограниченных в существенном функций $y : E \to R^m$, $\|y\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t\in E} |y(t)|$. В перечисленных обозначениях будем опускать индексы $m = 1$, $p = 1$. Кроме того, в обозначениях функциональных пространств не будем писать, где определены и в каких множествах имеют значения функции – элементы пространств, если это не вызовет недоразумений.

Основные понятия. Везде ниже предполагается, что B является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел либо над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, на котором задана система $\mathfrak{V}$ отношений эквивалентности $\upsilon(\gamma)$, $\gamma \in [0, 1]$, удовлетворяющая условиям:

$V_0)$ $\gamma = 0$ соответствует отношение $\upsilon(0) = B^2$;

$V_1)$ $\gamma = 1$ соответствует отношение равенства;

$V_2)$ если $\gamma > \eta$, то $\upsilon(\gamma) \subset \upsilon(\eta)$.

Кроме того, будем считать, что при каждом $\gamma \in (0, 1)$, для любых элементов $x, \widehat{x}, y, \widehat{y} \in B$ и всякого числа λ,

$$(x, \widehat{x}) \in \upsilon(\gamma), \quad (y, \widehat{y}) \in \upsilon(\gamma), \ \Rightarrow \ (x + y, \widehat{x} + \widehat{y}) \in \upsilon(\gamma), \quad (\lambda x, \lambda\widehat{x}) \in \upsilon(\gamma). \tag{1}$$

Пусть $\overline{x}_\gamma$ – класс элементов, $\upsilon(\gamma)$-эквивалентных элементу $x \in B$, $B/\upsilon(\gamma)$ – фактор-пространство, $\overline{x}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$, $\Pi_\gamma : B \to B/\upsilon(\gamma)$ – каноническая проекция, т.е. линейное отображение, заданное равенством $\Pi_\gamma x = \overline{x}_\gamma$. Нулевой элемент фактор-пространства $\overline{0}_\gamma = \{\, y \in B \mid (y, 0) \in \upsilon(\gamma) \,\}$ является подпространством пространства B.

О п р е д е л е н и е. Оператор $F : B \to B$ называем *вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,\, 1)$ и любых таких $x, y \in B$, что $(x, y) \in \upsilon(\gamma)$, имеет место $(Fx, Fy) \in \upsilon(\gamma)$.

Далее будем рассматривать только линейные операторы. Из приведенного определения следует, что линейный оператор $F : B \to B$ *вольтерров на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,\, 1)$ и любого $y \in B$ из $y \in \overline{0}_\gamma$ следует $Fy \in \overline{0}_\gamma$. Для линейного вольтеррового на $\mathfrak{V}$ оператора $F : B \to B$ обозначим $F_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ – линейный оператор, определяемый равенством $F_\gamma \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma Fx$, где $x \in \overline{x}_\gamma$. Отметим, что натуральную степень

$(F_\gamma)^i : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ оператора F_γ можно находить с помощью равенства $(F_\gamma)^i \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma F^i x,\ x \in \overline{x}_\gamma$, т.е. $(F_\gamma)^i = (F^i)_\gamma$.

Зафиксируем произвольное $\gamma \in (0,\,1)$. Отношение эквивалентности $\upsilon(\xi)$, $\xi \in [0,\,1]$, можно рассматривать не на всех элементах B, а лишь на элементах подпространства $\overline{0}_\gamma$. Таким образом, на подпространстве $\overline{0}_\gamma$ оказывается заданной система отношений эквивалентности, удовлетворяющая условиям $V_0) - V_2)$ и (1). Из вольтерровости линейного оператора $F : B \to B$ на совокупности $\mathfrak{V}$ следует вольтерровость его сужения $F^\gamma : \overline{0}_\gamma \to \overline{0}_\gamma$ на (сужении) υ.

Система отношений $\mathfrak{V}$ пространства B порождает отношения эквивалентности в фактор-пространстве $B/\upsilon(\gamma)$: классы $\overline{x}_\gamma, \overline{y}_\gamma \in B/\upsilon(\gamma)$ называем $\upsilon^\gamma(\zeta)$-эквивалентными, $\zeta \in (0,1)$, если существуют (и, следовательно, любые) элементы $x \in \overline{x}_\gamma$, $y \in \overline{y}_\gamma$, удовлетворяющие отношению $\upsilon(\xi)$, $\xi = \gamma\zeta$. Таким образом, заданная на $B/\upsilon(\gamma)$ система $\mathfrak{V}^\gamma = \{\upsilon^\gamma(\zeta)\}$ отношений эквивалентности также удовлетворяет условиям $V_0) - V_2)$ и (1). Если оператор $F : B \to B$ вольтерров на системе $\mathfrak{V}$, то оператор $F_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ будет вольтерровым на системе $\mathfrak{V}^\gamma$.

Приведем критерий вольтерровости обратного оператора.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть существует обратный оператор F^{-1} к вольтерровому оператору F. Для того чтобы F^{-1} был вольтерровым оператором, необходимо и достаточно, чтобы операторы $F_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ были обратимы для каждого $\gamma \in (0,1)$. В этом случае имеет место равенство $(F^{-1})_\gamma = (F_\gamma)^{-1}$.*

Отметим, что для вольтерровых по А.Н. Тихонову операторов, действующих в пространствах суммируемых функций, приведенное утверждение было получено А.И. Булгаковым (и доложено на Пермском семинаре проф. Н.В. Азбелева в 1978 г).

Линейные вольтерровые операторы в нормированных пространствах. Везде далее предполагаем, что линейное пространство B нормировано, и наделяем фактор-пространство $B/\upsilon(\gamma)$ нормой [10, с. 128]

$$\|\overline{x}_\gamma\|_{B/\upsilon(\gamma)} = \inf_{x \in \overline{x}_\gamma} \|x\|_B \,.$$

Т е о р е м а 1. *Если B – нормированное пространство, линейный ограниченный оператор $F : B \to B$ является вольтерровым на системе υ, то при любом $\gamma \in (0,1)$ линейный оператор $F_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ ограничен и $\|F_\gamma\| \leqslant \|F\|$.*

Следствие 1. *Пусть действующий в банаховом пространстве B линейный ограниченный вольтерровый на $\mathfrak{V}$ оператор F обратим. Если оператор F^{-1} вольтерров, то операторы $F_\gamma^{-1} : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ ограничены в совокупности.*

Следствие 2. *Если B – нормированное пространство, линейный ограниченный оператор $K : B \to B$ является вольтерровым на системе υ, то при любом $\gamma \in (0,1)$ спектральный радиус $\rho(K)$ оператора $K_\gamma : B/\upsilon(\gamma) \to B/\upsilon(\gamma)$ удовлетворяет неравенству $\rho(K_\gamma) \leqslant \rho(K)$.*

Пусть пространство B^* является сопряженным к пространству B. Определим при каждом $\gamma \in [0,1]$ в пространстве B^* отношение эквивалентности $\upsilon^*(\gamma)$, полагая $(l, \widehat{l}) \in \upsilon^*(\gamma)$, если для любых $x, \widehat{x} \in B$ таких, что $(x, \widehat{x}) \in \upsilon(1-\gamma)$ выполнено $l\,x = \widehat{l}\,\widehat{x}$.

Т е о р е м а 2. *Если линейный ограниченный оператор $K : B \to B$ является вольтерровым на системе υ, то сопряженный оператор $K^* : B^* \to B^*$ будет вольтерровым на системе $\upsilon^*(\gamma)$.*

Если пространство B банахово, и если при любом $\gamma \in (0,1)$ подпространство $\overline{0}_\gamma$ замкнуто, то мы говорим, что в пространстве B выполнено *V-условие* (*относительно системы отношений* $\mathfrak{V}$). В этом случае, при каждом $\gamma \in (0,1)$ пространство $B/\upsilon(\gamma)$ является банаховым.

Т е о р е м а 3. *Если в пространстве B выполнено V-условие, то для линейного ограниченного вольтеррового на системе $\mathfrak{V}$ оператора $K : B \to B$ со спектральным радиусом $\rho(K) < 1$, оператор $(I-K)^{-1}$ также будет вольтерровым на υ.*

Для того чтобы сформулировать утверждение, позволяющее оценивать, а в ряде случаев и вычислять спектральный радиус вольтеррового оператора, нам потребуется определить следующие операторы. Пусть $0 < \eta < \gamma < 1$. Для вольтеррового на совокупности $\mathfrak{V}$ оператора $K : B \to B$ рассмотрим сужение $K^\eta : \overline{0}_\eta \to \overline{0}_\eta$, которое является вольтерровым на (сужении) $\mathfrak{V}$ оператором. Это позволяет задать оператор $K_\gamma^\eta : \overline{0}_\eta/\upsilon(\gamma) \to \overline{0}_\eta/\upsilon(\gamma)$, $K_\gamma^\eta \overline{x}_\gamma = \Pi_\gamma K^\eta x$, где $x \in \overline{0}_\eta$ – представитель класса $\overline{x}_\gamma \in \overline{0}_\eta/\upsilon(\gamma)$. Возьмем произвольное натуральное k и любые числа $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_k = 1$. Определим операторы

$$K_{\gamma_1}^{\gamma_0} = K_{\gamma_1} : B/\upsilon(\gamma_1) \to B/\upsilon(\gamma_1),$$

$$K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}} : \overline{0}_{\gamma_{i-1}}/\upsilon(\gamma_i) \to \overline{0}_{\gamma_{i-1}}/\upsilon(\gamma_i), \quad i = \overline{2,\, k-1},$$

$$K_{\gamma_k}^{\gamma_{k-1}} = K^{\gamma_{k-1}} : \overline{0}_{\gamma_{k-1}} \to \overline{0}_{\gamma_{k-1}}.$$

Заметим, что $\rho(K^{\gamma_{i-1}}) \leqslant \rho(K)$ при всех $i = \overline{1,\,k}$ и, согласно следствию 2 к теореме 2, выполнено неравенство

$$\rho(K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}) \leqslant \rho(K). \tag{2}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть в банаховом пространстве B относительно системы $\mathfrak{V}$ выполнено V-условие, и пусть линейный ограниченный оператор $K : B \to B$ является вольтерровым на υ. Тогда его спектральный радиус определяется формулой*

$$\rho(K) = \max_{i=\overline{1,\,k}} \rho(K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}) \tag{3}$$

где $\{\gamma_i\}$ – любой конечный набор чисел $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_k = 1$.

В качестве примера применения доказанной теоремы вычислим спектральный радиус интегрального оператора

$$K : L([0,1], R) \to L([0,1], R), \quad (Kx)(t) = \int\limits_0^1 \mathcal{K}(t,\, s)\, x(s)\, ds, \tag{5}$$

где $\mathcal{K}(t,s) = \begin{cases} 1, \ \text{если} \ \ 0 \leqslant s < \min\Big\{\dfrac{[\![t\,k]\!]+1}{k}\,, 1\Big\}, \ \ t \in [0,1], \\ 0, \ \text{если} \ \ \min\Big\{\dfrac{[\![t\,k]\!]+1}{k}\,, 1\Big\} \leqslant s \leqslant 1\,, \ \ t \in [0,1]; \end{cases}$ k – некоторое натуральное число. Схематично это ядро представлено на рис. 1.

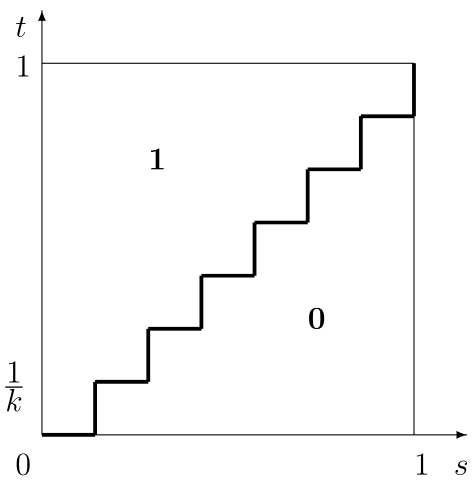

Рис. 1

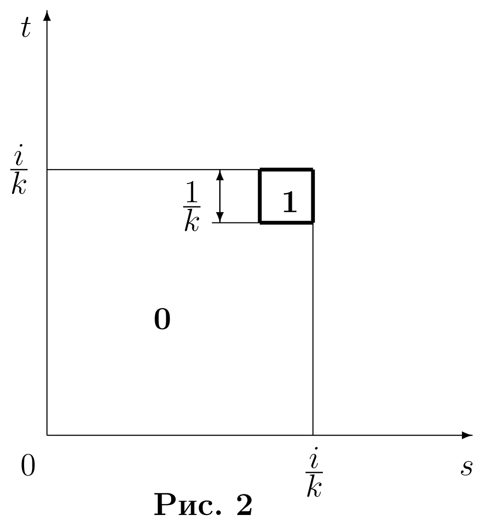

Рис. 2

Этот оператор не является вольтерровым по А.Н. Тихонову. Определим в пространстве $L = L([0,1], R)$ систему $\mathfrak{V}$ отношений эквивалентности $\upsilon(\gamma)$, $\gamma \in (0,1)$, следующим образом

$$\forall\, x, y \in L \quad (x,y) \in \upsilon(\gamma) \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = y(t) \text{ при почти всех } t \in \big[0, \frac{[\![\gamma\, k]\!]}{k}\big].$$

Классы $\upsilon(\gamma)$-эквивалентности можно отождествить с функциями, определенными на $e_\gamma = \big[0, \frac{[\![\gamma\, k]\!]}{k}\big]$, т.е. $B/\upsilon = L(e_\gamma, R)$. Соответственно, $\overline{0}_\eta/\upsilon(\gamma) \subset L(e_\gamma, R)$ – подпространство функций, которые равны нулю на e_η. На рассматриваемой системе $\mathfrak{V}$ оператор (4) будет вольтерровым. Выберем $\gamma_i = \dfrac{i}{k}$, $i = \overline{1,k}$. Оператор $K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}} : \overline{0}_{\gamma_{i-1}}/\upsilon(\gamma_i) \to \overline{0}_{\gamma_{i-1}}/\upsilon(\gamma_i)$ также является интегральным,

$$(K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}} x)(t) = \int\limits_o^{\gamma_i} \mathcal{K}_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}(t,\, s)\, \overline{x}_{\gamma_i}(s)\, ds.$$

Его ядро (см. рис. 2) $\mathcal{K}_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}(t,s) = \begin{cases} 1, & \text{если}\, (t,\, s) \in [\,\gamma_{i-1}\,,\, \gamma_i\,]^2, \\ 0, & \text{если}\, (t,\, s) \in [\,0,\, \gamma_i\,]^2 \backslash [\,\gamma_{i-1}\,,\, \gamma_i\,]^2. \end{cases}$ Спектральный радиус оператора $K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}$ легко вычислить: $\rho(K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}) = \dfrac{1}{k}$. Таким образом, на основании теоремы 4 получим $\rho(K) = \dfrac{1}{k}$.

Следствие. *Пусть в банаховом пространстве B относительно системы $\mathfrak{V}$ выполнено V-условие, и пусть линейный ограниченный оператор $K : B \to B$ является вольтерровым на υ. Тогда спектральный радиус этого оператора удовлетворяет неравенству $\rho(K) \leqslant \max\limits_{i=\overline{1,k}} \|K_{\gamma_i}^{\gamma_{i-1}}\|$, где $\{\gamma_i\}$ – любой конечный набор чисел $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_k = 1$.*

Чтобы сформулировать еще некоторые утверждения об обратимости вольтерровых операторов (в том числе и следующие из теоремы 4), определим отображение $Z_{_B} : [0,1] \times B \to R$, $Z_{_B}(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma\, y\|_{_{B/\upsilon(\gamma)}}$ при $\gamma \in (0,1)$, $Z_{_B}(1, y) = \|y\|_{_B}$, $Z_{_B}(0,y) = \lim\limits_{\gamma \to 0+0} Z_{_B}(\gamma, y)$. Нам потребуется следующее

О п р е д е л е н и е. Линейный оператор $K : B \to B$ называем *улучшающим на системе* $\mathfrak{V}$, если образом единичной сферы $U \subset B$ является множество элементов с равностепенно непрерывными нормами, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \tau > 0 \quad \forall x \in U \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$$

$$|\gamma_2 - \gamma_1| < \tau \;\Rightarrow\; |\, Z(\gamma_2, Kx) - Z(\gamma_1, Kx)| < \varepsilon, \tag{5}$$

и, кроме того,

$$Z(0, Kx) = 0 \tag{6}$$

при всех $x \in U$.

Т е о р е м а 5. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено условие V; линейный оператор $K : B \to B$ является улучшающим вольтерровым на системе υ. Тогда спектральный радиус этого оператора $\rho(K) = 0$.*

С л е д с т в и е. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено условие V; линейный оператор $K : B \to B$ является улучшающим вольтерровым на системе υ. Тогда обратный оператор $(I - \lambda K)^{-1}$ при любом λ является вольтерровым на υ.*

Т е о р е м а 6. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено условие V; линейный оператор $K : B \to B$ является улучшающим вольтерровым на системе υ, линейный оператор $S : B \to B$ ограничен и вольтерров на системе υ. Тогда, если один из операторов $I - K - S$, $I - S$ обратим и обратный к нему оператор вольтерров на υ, то обратим и другой и обратный к нему также будет вольтерровым.*

Следствие. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено условие V; линейный оператор $K : B \to B$ является улучшающим вольтерровым на системе υ, линейный ограниченный оператор $S : B \to B$ вольтерров на системе υ. Тогда спектральные радиусы операторов $K + S$, S одинаковы: $\rho(K + S) = \rho(S)$.*

Обобщенно вольтерровый интегральный оператор. Проиллюстрируем использование приведенных выше утверждений на примере интегрального оператора, для чего приведем некоторые результаты работ [7, 8]. Здесь будем предполагать, что измеримая по совокупности аргументов функция $\mathcal{K} : [a, b] \times [a, b] \to R$ такова, что интегральный оператор

$$(Ky)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t, s) y(s) ds\,, \quad t \in [a, b], \tag{7}$$

непрерывно действует в пространстве $L_p = L_p([a, b], R)$, $1 \leqslant p < \infty$, и является регулярным.[1]

Пусть каждому $\gamma \in [0, 1]$ поставлено в соответствие некоторое измеримое множество $e_\gamma \subset [a, b]$ с мерой $\mu(e_\gamma) = \gamma(b - a)$ таким образом, что

$$\forall\, \gamma, \eta \in [0, 1] \quad \gamma < \eta \quad \Rightarrow \quad e_\gamma \subset e_\eta. \tag{8}$$

В пространстве L_p при любом $\gamma \in (0, 1)$ определим отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$ сле-

[1] Условия действия и регулярности оператора $K : L_p \to L_p$ см., например, в [10, 11, 8, 2].

дующим образом:

$$\forall\, x, y \in L([a,b], R) \quad (x,y) \in \upsilon(\gamma) \iff x(s) = y(s) \text{ при почти всех } s \in e_\gamma. \tag{9}$$

Система $\mathfrak{V}$ таких отношений удовлетворяет условиям $V_0) - V_2)$ и (1).

Т е о р е м а 7. *Для того чтобы оператор $K : L_p \to L_p$, заданный формулой (7), являлся вольтерровым на системе υ, необходимо и достаточно выполнения равенства $\mathcal{K}(t,s) = 0$ почти всюду на $\{\, (t,s) \mid t \in [a,b],\ s \in [a,b] \setminus e_{\varsigma(t)} \,\}$. Здесь $\varsigma(t) = \inf\{\, \gamma \mid t \in e_\gamma \,\}$.*

Частным случаем приведенного утверждения является известное условие вольтерровости по А.Н. Тихонову оператора (7), состоящее в равенстве $\mathcal{K}(t,s) = 0$ почти всюду в треугольнике $\{\, (t,s) \mid t \in [a,\, b],\ s \in [a,\, t] \,\}$. Отметим, что множество $E = \{\, (t,s) \mid t \in [a,\, b],\ s \in [a,\, b] \setminus e_{\varsigma(t)} \,\} \subset R^2$ измеримо, его мера $\mu\, E = \dfrac{(b-a)^2}{2}$.

В предположении регулярности интегрального оператора $K : L_p \to L_p$ вычислим n-ую $(n = 1, 2, \ldots)$ степень оператора $|K|$:

$$(|K|^1 y)(t) = (|K| y)(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}^1(t,s)\, y(s)\, ds, \quad \text{где } \mathcal{K}^1(t,s) = |\mathcal{K}(t,s)|\,;$$

$$(|K|^n y)(t) = \int\limits_a^b \mathcal{K}^n(t,s)\, y(s)\, ds, \quad \text{где } \mathcal{K}^n(t,s) = \int\limits_a^b \mathcal{K}^1(t,\xi)\, \mathcal{K}^{n-1}(\xi,s)\, d\xi.$$

При каждом $t \in [a,\, b]$ зададим множества

$$\omega_t^n = \{\, s \in [a,\, b] \mid \mathcal{K}^n(t,s) \neq 0 \,\}, \quad \omega_t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_t^n.$$

Пусть $\mathcal{M}^n(t,s) = \mathcal{K}^1(t,s) + \mathcal{K}^2(t,s) + \cdots + \mathcal{K}^n(t,s)\,.$

Т е о р е м а 8. *Для того чтобы существовала такая система множеств, удовлетворяющих требованию (8), что регулярный интегральный оператор (7) являлся бы вольтерровым на совокупности отношений (9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1. $\mathcal{M}^n(t,s)\mathcal{M}^n(s,t) = 0$ *при любом n и почти всех $(t,s) \in [a,\, b] \times [a,\, b]$;*

2. $\operatorname{mes}\{\, t \mid \operatorname{mes}(\omega_t) \leqslant \gamma \,\} \geqslant \gamma$, *при всех $\gamma \in [0,\, b-a]$.*

Т е о р е м а 9. *Для того чтобы положительный интегральный оператор* $|K|: L_p \to L_p$, $1 \leqslant p < \infty$ *являлся улучшающим на любой совокупности отношений, определенных формулой (9), необходимо, а при* $p = 1$ *и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое положительное* τ, *что для любых измеримых множеств* E, $e \subset [a,\, b]$ *из неравенства* $\operatorname{mes} e < \tau$ *следовало*

$$\Big(\int\limits_e \Big(\int\limits_E |\,\mathcal{K}(t,s)\,|\,ds\,\Big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon(\operatorname{mes} E)^{\frac{1}{p}}\,.$$

Приведенное утверждение позволяет сказать, что при необременительных "естественных" ограничениях интегральный оператор является улучшающим. В этом случае из вольтерровости оператора следует равенство нулю его спектрального радиуса. Оказывается, что для интегрального положительного оператора $|K|$ вольтерровость на какой-нибудь системе $\mathfrak{V}$ является и необходимым условием того, что $\rho(|K|) = 0$.

Т е о р е м а 10. *Если интегральный оператор* $K : L_p \to L_p$, *определяемый равенством (7), является регулярным, и если спектральный радиус положительного оператора* $|K| : L_p \to L_p$ *равен нулю, то существует такая система* $\mathfrak{V}$ *отношений, определяемых формулой (9), что оператор* K *вольтерров на этой системе.*

Отметим, что в формулировке последнего утверждения нельзя заменить условие $\rho(|K|) = 0$ более слабым $\rho(K) = 0$. Так, например, оператор $K : L([0,1],R) \to L([0,1],R)$, $(Ky)(t) = (t - 0,5)\int\limits_0^1 y(s)ds$ не является вольтерровым ни на какой системе $\mathfrak{V}$ отношений (9), хотя его спектральный радиус $\rho(K) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюл. Моск. ун-та. Секц. А. 1938. Вып. 8. Т. 1. С. 1-25.

2. *Забрейко П.П.* Об интегральных операторах Вольтерра // УМН. 1967. Вып. 1. Т. 22. С. 167-168.

3. *Курбатов В.Г.* Об обратимости запаздывающих операторов // Теория операторных уравнений. Воронеж, 1979. С. 43-52.

4. *Feintuch A., Saeks R.* System Theory. A Hibert space approach. Academic Press. New York, London, 1982.

5. *Гусаренко С.А.* Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295. № 5. С. 1046-1049.

6. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056-1059.

7. *Жуковский Е.С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1599-1605.

8. *Жуковский Е.С.* Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2003. 140 с.

9. *Жуковский Е.С.* Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах // Матем. сб. 2004. Т. 195. № 9. С. 3-18.

10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

11. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустырник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 500 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, №07-01-00305, темплана 1.6.07, Норвежской национальной программы научных исследований FUGU при Совете научных исследований Норвегии и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования NUFU, грант PRO 06/02, Центра общей генетики CIGENE при Норвежском университете Естественных наук, Норвежского ученого Совета и Норвежского государственного образовательного фонда Lanekassen

Поступила в редакцию 10 ноября 2008 г.

The generalized definition of the Volterra property for operators is represented. It is shown that a series of fundamental statements of the integral Volterra operators theory are also true for linear Volterra-generalized operators.

Key words: Volterra-generalized operator, second order Volterra equation, spectral radius, integral operator, Volterra property of a conjugate operator.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tichonov A.N.* On functional equations of Volterra type and it's applications to some problems of mathematical physics // Bulletin of Moscow University. Section A. 1938. V. 1, № 8. P. 1-25.

2. *Zabreyko P.P.* On Integral Volterra operators // UMN. 1967. V. 22, № 1. P. 167-168.

3. *Kurbatov V.G.* On reversibility of operators with delay // Operator equations theory. Voronezh, 1979. P. 43-52.

4. *Feintuch A., Saeks R.* System Theory. A Hibert space approach. Academic Press. New York, London, 1982.

5. *Gusarenko S.A.* On a one geralization of Volterra operators conception // Rep. SA USSR. 1987. V. 295, № 5. P. 1046-1049.

6. *Sumin V.I.* Functional-operator Volterra equations in optimal control of allocated systems theory // Rep. SA USSR. 1989. V. 305, № 5. P. 1056-1059.

7. *Zhukovskiy E.S.* To theory of Volterra equations // Differ.equations. 1989. V. 25, № 9. P. 1599-1605.

8. *Zhukovskiy E.S.* Linear evolutionary functional-differential equations in Banach space. Tambov: Publishing house of TSU, 2003. 140 p.

9. *Zhukovskiy E.S.* Volterra inequalities in functional spaces // Math. col. 2004. V. 195, № 9. P. 3-18.

10. *Kantorovich L.V, Akilov G.P.* Functional analysis. M.: Science, 1984. 752 p.

11. *Krasnoselskiy M.A., Zabreyko P.P., Pustyrnik E.I., Sobolevskiy P.E.* Integral operators in summable functions spaces. M.: Science, 1966. 500 p.